Sur la pro-p-extension localement cyclotomique maximale d'un corps de nombres

Romain Validire

8 décembre 2008

Résumé. Soit p un nombre premier et F_∞ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique d'un corps de nombres F. Nous étudions le groupe de Galois $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ sur F_∞ de la pro-p-extension non ramifiée, p-décomposée maximale de F_∞. La question de la pro-p-liberté de $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ a déjà été évoqué par de nombreux auteurs. Dans cet article, nous caractérisons la pro-p-liberté de $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ en termes de descente galoisienne pour certains noyaux de localisation en cohomologie galoisienne : *les noyaux sauvages étales*. Nous en déduisons des critères effectifs pour la non pro-p-liberté de ce groupe.

Abstract. Let p be a prime number and F_∞ be the cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension of a number field F. We consider the Galois group $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ over F_∞ of the maximal unramified, p-decomposed, pro-p-extension of F_∞. The question whether $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ is free pro-p was already asked by many authors. In this article, we highlight a link between the freeness of $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ and the Galois descent for some localisation kernels : *the étale wild kernels*. Then we give explicit criterions to show that $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ is not a free pro-p-group.

Introduction

Soient p un nombre premier et F une extension algébrique du corps des rationnels $\mathbb{Q}$. On désigne par $\mathcal{L}_F$ la pro-p-extension non ramifiée maximale de F et on note $\mathcal{G}_F = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}_F/F)$ son groupe de Galois sur F.
Même dans le cas où F est un corps de nombres (i.e. $F/\mathbb{Q}$ est fini), la structure du pro-p-groupe $\mathcal{G}_F$ n'est pas bien connue. La théorie du corps de classes nous montre que $\mathcal{G}_F^{ab}$ est isomorphe à la p-partie du groupe des classes de F (il s'agit donc d'un groupe fini). En 1964, Golod et Shafarevitch ont donné les premiers exemples de corps F pour lesquels $\mathcal{G}_F$ est infini. De nombreuses questions concernant la structure de ces groupes restent cependant ouvertes (dimension cohomologique, analyticité p-adique,...).

Soit F_∞ une $\mathbb{Z}_p$-extension de F. Une stratégie classique pour étudier le groupe $\mathcal{G}_F$, est d'étudier le groupe $\mathcal{G}_{F_\infty}$ via la théorie d'Iwasawa des $\mathbb{Z}_p$-extensions (c'est par exemple le point de vue adopté dans [O]) ; l'idée est ensuite de *descendre* les résultats au niveau de F. Dans cet article, nous nous intéressons aux objets suivants :

- F_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension *cyclotomique* d'un corps de nombres F.
- $\mathcal{L}'_{F_\infty}$ est la pro-p-extension non ramifiée, *p-decomposée*, maximale de F_∞ et le groupe de Galois

$$\mathcal{G}'_{F_\infty} = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}'_{F_\infty}/F_\infty).$$

Le groupe $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ est un quotient naturel de $\mathcal{G}_{F_\infty}$ et leurs structures sont fortement reliées. Dans cet article, nous nous intéressons à la question suivante :

Le groupe $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ est-il un pro-p-groupe libre ?

On désigne par A'_F la p-partie du groupe des p-classes de F et par μ_n le groupe des racines n-ièmes de l'unité. Faisons un bref historique de la question précédente. Supposons que le corps F est à multiplication complexe et que la *partie plus* de A'_F est triviale (par exemple, F est un corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\mu_p)$ satisfaisant la *conjecture* de Vandiver) ; sous ces hypothèses, on pensait que le groupe $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ était pro-p-libre (cf. [Wi, Theorem 1] et [N2, Exemples 3.2]). Cependant, en 2003, des résultats de W. McCallum et R. Sharifi (cf. [MS]) mettent en porte-à-faux les résultats antérieurs. En particulier, on a l'exemple suivant (cf. [Sha]) : pour $p = 157$ et $F = \mathbb{Q}(\mu_{157})$ le groupe $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ est isomorphe au groupe abélien $\mathbb{Z}_p^2$. Aujourd'hui, les seuls exemples connus de couples (F, p) pour lesquels $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ est pro-p-libre sont les couples (F, p) pour lesquels $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ est trivial ou isomorphe à $\mathbb{Z}_p$.

Dans cet article, notre but est de caractériser la pro-p-liberté de $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ en termes de descente galoisienne pour les *noyaux sauvages étales*. Pour tout $i \geq 1$, les noyaux sauvages étales $WK_{2i}^{ét}(F)$ attaché à F et p peuvent être vus comme des versions *tordues* du p-groupe des classes A'_F. Ils sont définis comme des noyaux de localisation en cohomologie galoisienne. Pour $i = 1$, le groupe $WK_2^{ét}(F)$ est isomorphe à la p-partie du noyau sauvage *classique* i.e. le noyau des symboles de Hilbert dans le groupe $K_2(F)$.

Dans une première partie, nous établissons un résultat (Proposition 1.4) qui caractérise la liberté d'un pro-p-groupe au moyen du morphisme de transfert. Dans une seconde partie, nous rappelons une description classique, due à Schneider, des noyaux sauvages en termes d'un certain module d'Iwasawa. L'objet de la troisième partie est détablir le résultat principal (théorème 3.4) qui relie le comportement galoisien des noyaux sauvages à la structure de $\mathcal{G}'_{F_\infty}$.

Notons que l'étude de $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ (précisement la finitude) via les noyaux sauvages a déjà été entreprise dans [As]. L'auteur retrouve le critère d'infinitude pour $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ donné dans [JS]. Celui-ci provient d'une inégalité à la Golod et Shafarevitch. Dans la dernière partie, nous obtenons à l'aide du théorème 3.4 un critère de *non* pro-p-liberté (théorème 4.3) pour $\mathcal{G}'_{F_\infty}$; celui-ci s'exprime au moyen d'une inégalité similaire à celle de [JS]. Le critère nous permet de construire effectivement des couples (F,p) pour lesquels $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ n'est pas libre. Enfin, toujours comme conséquence du théorème 3.4, nous obtenons le corollaire 4.7 qui montre que pour un corps F à multiplication complexe, la trvialité de la partie plus de A'_F est une condition *nécessaire* pour la liberté de $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ (nous retrouvons ainsi le résultat [Wi, Proposition 3.3]).

1 Préliminaires cohomologiques

1.1 Pro-p-liberté et transfert

Fixons un nombre premier p. Dans ce paragraphe nous rappelons des résultats standards sur la cohomologie des groupes et la notion de pro-p-liberté. On peut trouver la plupart des résultats énoncés dans [NSW] ou [Se2].

Etant donné un groupe abélien M localement compact, on rappelle que M^* désigne le dual de Pontryagin de M. C'est le groupe $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ des homomorphismes *continus* de M vers $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On a une dualité parfaite $M \simeq (M^*)^*$ qui transforme les groupes discrets en groupes compacts.

Lorsque M est un pro-p-groupe ou un groupe discret de p-torsion

$$M^* = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

Soit G un groupe profini et M un G-module *compact*. Pour tout entier $n \geq 0$, les groupes d'homologie sont définis par dualité à partir des groupes de cohomologie :

$$H_n(G, M) := (H^n(G, M^*))^* .$$

Etant donné un pro-p-groupe G, on note G^{ab} l'abelianisé de G. C'est le quotient de G par l'adhérence de son sous-groupe dérivé $[G, G]$.
En outre, on a

$$G^{ab} \simeq H_1(G, \mathbb{Z}_p).$$

La notation $H \lhd G$ signifie que H est un sous-groupe distingué de G. Enfin, on note $d(G) := \dim_{\mathbb{F}_p}(H^1(G, \mathbb{F}_p))$ le p-rang de G. C'est le nombre minimal de générateurs de G.

Etant donné un pro-p-groupe G, on note $cd(G)$ (resp. $scd(G)$) la dimension cohomologique (resp. dimension cohomologique stricte) du pro-p-groupe G.

Pro-p-liberté et dimension cohomologique sont reliées par la proposition suivante :

Proposition 1.1. *Soit G un pro-p-groupe non trivial. On a l'équivalence :*
(i) G est pro-p-libre.

(ii) $cd(G) = 1$.

Il en découle la caractérisation suivante :

Proposition 1.2. *Le groupe G est pro-p-libre si et seulement si* $scd(G) = 2$ *et* G^{ab} *est sans p-torsion.*

Etant donnés un pro-p-groupe G et un sous-groupe H *d'indice fini* de G, on définit (cf. [Se1, VII, §8]) un morphisme canonique appelé *transfert* :

$$Ver : G^{ab} \to H^{ab},$$

qui s'identifie à l'homomorphisme de restriction entre groupes d'homologie :

$$res : H_1(G, \mathbb{Z}_p) \to H_1(H, \mathbb{Z}_p).$$

Par dualité, le transfert s'identifie à l'application de corestriction entre les groupes de cohomologie :

$$cor : H^1(H, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \to H^1(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

La proposition suivante fait un lien entre l'étude du transfert et la dimension cohomologique stricte (cf. [NSW, Theorem 3.6.4]). Elle caractérise les groupes profinis dont la dimension cohomologique stricte est égale à 2. Ces groupes sont particulièrement importants, notamment parce qu'ils apparaissent naturellement en théorie du corps de classes. Cette proposition est une combinaison de résultats dûs à J.-P. Serre et J. Tate.

Proposition 1.3. *Soit G un groupe profini non nul. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) La dimension cohomologique stricte de G est 2.

(ii) Pour tout couple de sous-groupes ouverts distingués $V \lhd U$, *le transfert induit un isomorphisme* $U^{ab} \overset{\simeq}{\to} (V^{ab})^{U/V}$.

Nous proposons une adaptation de la proposition précédente ; celle-ci permet de caractériser exactement la pro-p-liberté d'un groupe au moyen du tansfert.

Proposition 1.4. *Soit G un pro-p-groupe non nul. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) G est pro-p-libre.

(ii) Pour tout sous-groupe ouvert $U \lhd G$ *le module* U^{ab} *est* $\mathbb{Z}_p$*-libre et pour tout couple de sous-groupes ouverts* $V \lhd U$, *le transfert induit une injection*

$$\mathcal{V} : U^{ab} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \hookrightarrow V^{ab} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,$$

où $\mathcal{V}$ *est définie par* $\mathcal{V}(x \otimes \frac{1}{p^n}) = Ver(x) \otimes \frac{1}{p^n}$.

Démonstration. la proposition est une conséquence des propositions 1.2 et 1.3. $\square$

1.2 K-théorie des anneaux d'entiers et cohomologie galoisienne

Commençons par donner quelques notations.
Soient p un nombre premier et F un corps de nombres, on note :

μ_{p^n} le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité,

$\mu_{p^\infty} := \bigcup_{n \geq 1} \mu_{p^n}$ et $\mathbb{Z}_p(1) := \varprojlim \mu_{p^n}$,

F_v le localisé de F en v, où v désigne une place de F,

$S_p = S_p(F)$ l'ensemble des places de F divisant p et ∞,

$S = S_F$ un ensemble fini de places de F contenant S_p,

$\mathcal{O}_F^S$ l'anneau des S-entiers de F,

A'_F la p-partie du groupe du groupe de classes de $\mathcal{O}_F^{S_p}$,

F^S l'extension S-ramifiée maximale de F et $G_F^S := \mathrm{Gal}(F^S/F)$,

$r_1(F)$ (resp. $r_2(F)$) le nombre de places réelles (resp. de places complexes à conjuguaison près) de F.

Enfin pour tout $i \geq 0$, on pose

$$A(i) := A \otimes \mathbb{Z}_p(i) = A \otimes \underbrace{\mathbb{Z}_p(1) \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}_p(1)}_{i \text{ fois}},$$

le i-ième tordu à la Tate de A.

Hypothèse : dans toute la suite du texte, lorsque $p = 2$ on suppose que $\sqrt{-1} \in F$.

Pour $i \geq 1$, et $k = 1, 2$ les groupes de K-théorie étale $K_{2i+2-k}^{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S)$ introduits par Dwyer et Friedlander (cf. [KM]) sont isomorphe aux groupes de cohomologie galoisienne continue :

$$H_{cont}^k(G_F^S, \mathbb{Z}_p(i+1)) := \varprojlim H^k(G_F^S, \mathbb{Z}/p^n(i+1)).$$

Les résultats de Quillen et Borel sur la K-théorie algébrique ainsi que les résultats de Soulé sur la surjectivité des caractères de Chern (cf [Sou]) nous donnent les propriétés suivantes :

– Pour tout $i \geq 1$, les groupes $K_{2i}^{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S)$ sont *finis*.

– Pour tout $i \geq 1$, les groupes $K_{2i+1}^{ét}(\mathcal{O}_F^S) \simeq K_{2i+1}^{ét}(F)$ sont de *type fini* sur $\mathbb{Z}_p$. Précisément, on a :

$$rg_{\mathbb{Z}_p}(K_{2i+1}^{ét}(F)) = \begin{cases} r_1 + r_2 & \text{si } i \text{ est pair,} \\ r_2 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

Rappelons qu'une extension de corps de nombres L/F est une p-extension lorsque L/F est une extension galoisienne finie et $\mathrm{Gal}(L/F)$ est un p-groupe.

On fixe un ensemble fini S de places de F contenant les places p-adiques et les places à l'infini. Par abus, on note toujours $S := S_L$ l'ensemble des places de L au-dessus des places contenues dans S. On s'intéresse maintenant au comportement galoisien des K-groupes dans les p-extensions S-ramifiées.

Soit M un groupe abélien et G un groupe opérant sur M. On note
– M^G le sous-groupe de M des éléments invariants par G.
– M_G le quotient $M/I_G M$, où I_G est le sous-groupe de $\mathbb{Z}[G]$ engendré par les $g-1$, $g \in G$.

Soit L/F une p-extension de groupe de Galois G, non ramifiée hors de S. Pour $i \geq 1$ et $k \in \{1,2\}$ on a un morphisme d'extension :

$$e_{k,i} : K_{2i+2-k}^{ét}(\mathcal{O}_F^S) \to K_{2i+2-k}^{ét}(\mathcal{O}_L^S)^G,$$

qui s'interpr'ete cohomologiquement comme un morphisme de restriction.

Les noyaux des morphismes d'extension sont appelés *noyaux de capitulation.* Ils jouent un rôle central dans la suite de l'article.

Définition 1.5. *Pour toute extension S-ramifiée finie L/F et tout entier $i \geq 1$, on note :*

$$\mathrm{Cap}_i^S(L/F) := \ker(K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S) \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_L^S)).$$

Si $\mathcal{L}/F$ est une extension algébrique, on pose $\mathrm{Cap}_i^S(\mathcal{L}/F) = \varinjlim \mathrm{Cap}(L/F)$, où L parcourt les sous-extensions finies de $\mathcal{L}/F$.

Tout comme les noyaux de capitulation des groupes de classes qui s'expriment en termes de cohomologie des *unités*, les noyaux $\mathrm{Cap}_i^S(L/F)$ sont reliés à la cohomologie des K-groupes *impairs*. Pour $i = 1$, le résultat suivant est à rapprocher d'un résultat de B. Kahn (cf [Ka]). Pour la généralisation à tout $i \geq 1$, on renvoie à [KM, Theorem 1.2].

Les groupes $\hat{H}^*(G, .)$ désignent les groupes de cohomologie modifiés (cf. par exemple [Se1, Chapitre VIII])

Théorème 1.6. *Soit L/F une p-extension, non ramifiée en dehors de S et $G := \mathrm{Gal}(L/F)$. Alors*

$$\mathrm{Cap}_i^S(L/F) \simeq \hat{H}^{-1}(G, K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_L^S)) \simeq H^1(G, K_{2i+1}^{ét}(L)), \text{ et}$$

$$\mathrm{coker}(e_{2,i}) \simeq \hat{H}^0(G, K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_L^S)) \simeq H^2(G, K_{2i+1}^{ét}(L)).$$

De plus, lorsque L/F est cyclique, le quotient de Herbrand

$$h(G, K_{2i+1}^{ét}(L)) = \frac{|H^2(G, K_{2i+1}^{ét}(L))|}{|H^1(G, K_{2i+1}^{ét}(L))|}$$

est trivial.

Remarques.

- Les noyaux $\mathrm{Cap}_i^S(L/F)$ ne dépendent pas de l'ensemble S contenant $S_p \cup S_\infty$ et les premiers ramifiés dans L/F. On note désormais

$$\mathrm{Cap}_i(L/F) := \mathrm{Cap}_i^S(L/F).$$

- Trouver une minoration intéressante de $|\mathrm{Cap}_i(L/F)|$ est en général plus difficile (le problème est soulevé par B. Kahn dans l'introduction de [Ka]). Dans [AM], les auteurs donnent une minoration de cet ordre sous certaines hypothèses de ramification pour L/F.

La proposition suivante est classique et porte sur la trivialité des noyaux de capitulation dans une p-extension.

Proposition 1.7. *Soient L/F et L'/F des p-extensions finies, S-ramifiées avec $L \subset L'$. Alors*

$$\mathrm{Cap}_i(L'/F) = 0 \text{ si et seulement si } \mathrm{Cap}_i(L'/L) = 0 \text{ et } \mathrm{Cap}_i(L/F) = 0$$

1.3 L'algèbre d'Iwasawa

Nous terminons cette partie par quelques rappels sur l'algèbre d'Iwasawa. Soit $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[T]]$, l'algèbre des séries formelles en T à coefficient dans $\mathbb{Z}_p$. Soient Γ un pro-p-groupe multiplicatif isomorphe à $\mathbb{Z}_p$ et γ un générateur topologique de Γ. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $\Gamma_n := \Gamma^{p^n}$. L'agèbre Λ est topologiquement isomorphe à l'algèbre de groupes complète $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]] = \varprojlim \mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_n]]$ via l'application $\gamma \to 1 + T$.
Si M est un Λ-module de type fini, il existe des polynômes distingués irréductibles $f_i \in \mathbb{Z}_p[T]$, des entiers n_i, m_j et r_M tels que M est pseudo-isomorphe à

$$\Lambda^r \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda/(f_i)^{n_i} \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \Lambda/(p)^{m_j},$$

Les entiers r_M, $\lambda_M := \sum_{i=1}^n n_i \deg(f_i)$ et $\mu_M := \sum_{j=1}^m m_i$ sont les *invariants d'Iwasawa* de M. Le polynôme $f_M(T) = p^{\mu_X} \Pi_{i=1}^n f_i(T)$ est appelé polynôme caractéristique de M.

Rappelons que $F_\infty = \bigcup_{n \geq 0} F_n$ désigne la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F et $\Gamma := \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$. On note $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ le groupe de Galois sur F_∞ de la pro-p-extension non ramifiée, p-décomposée, maximale de F_∞ (c'est aussi la pro-p-extension non ramifiée, décomposée en *toute* place, maximale de F_∞).

Dans cet article, nous considérons le Λ-module

$$X'_{F_\infty} := H_1(\mathcal{G}'_{F_\infty}, \mathbb{Z}_p) \simeq \mathcal{G}'^{ab}_{F_\infty}.$$

C'est le groupe de Galois sur F_∞ de la pro-p-extension non ramifiée, p-décomposée, *abélienne*, maximale de F_∞. Par la théorie du corps de classe c'est aussi :

$$X'_{F_\infty} \simeq \varprojlim A'_{F_n},$$

où la limite projective est prise sur les morphismes de normes.
Le Λ-module X'_{F_∞} est de type fini et de torsion (i.e. $r_{X'_{F_\infty}} = 0$).
Il est conjecturé que $\mu_{X'_{F_\infty}} = 0$. Ce résultat est vrai lorsque $F/\mathbb{Q}$ est abélien, d'après un théorème de Ferrero et Washigton (cf. [FW]).
Remarque. L'hypothèse $\mu_{X'_{F_\infty}} = 0$ équivaut à dire que $\mathcal{G}'_\infty$ est un pro-p-groupe de type fini (i.e. $d(\mathcal{G}'_\infty) < +\infty$).

Rappelons pour finir les notions de *co-adjoint* et *suites admissibles* qui seront utiles dans la suite. Les Λ-modules considérés seront de type fini.
Considérons l'application naturelle de localisation :

$$\Psi_M : M \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{supp}(M)} M_{\mathfrak{p}},$$

où supp(M) désigne l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de Λ disjoints de l'idéal $(f_M(T))$ et $M_{\mathfrak{p}}$ le localisé de M en $\mathfrak{p}$. On définit alors :
Définition 1.8. ***(et Proposition.)***

coker $\Psi_M := \beta(M)$ *est le co-adjoint de* M.

ker $\Psi_M := M^0$ *est le sous-*Λ*-module fini maximal de* M.

La notion de suite *admissible* nous permet d'obtenir des représentation plus explicites du co-adjoint et du sous-module fini maximale de M.
Définition 1.9. *Une suite* $\{\pi_n\}_{n\geq 0}$ *d'éléments non nuls de* Λ *est* M*-admissible si*

1. $\pi_0 \in (p, T)$ *et pour tout* $n \geq 1$ *on a* $\pi_{n+1} \in \pi_n(p, T)$.
2. *Les diviseurs* π_n *et car*(M) *sont étrangers (i.e.* M/π_n *est fini).*

Théorème 1.10. *Soit* M *un* Λ*-module de torsion et de type fini et* $\{\pi_n\}_{n\geq 0}$ *une suite* M*-admissible. Alors on a un isomorphisme de* Λ*-modules*

$$\beta(M) \simeq \varinjlim M/\pi_n M.$$

Enfin le sous-module fini maximal M^0 de M se décrit de la manière suivante :

Théorème 1.11. *Soient M un Λ-module de type fini de torsion et $\{\pi_n\}$ une suite M-admissible. Pour tout $m \geq n \geq 0$,*

$$\ker\left(M/\pi_n \overset{\frac{\pi_m}{\pi_n}}{\rightarrow} M/\pi_m\right) \subseteq M^0/\pi_n.$$

De plus, pour tout $n \gg 0$ et tout $m \geq n$ suffisamment grand :

$$M^0 \simeq \ker\left(M/\pi_n \overset{\frac{\pi_m}{\pi_n}}{\rightarrow} M/\pi_m\right).$$

Il en résulte immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 1.12. *Pour tout $n \gg 0$, la projection $M \to M/\pi_n$ induit un isomorphisme :*

$$M^0 \simeq \ker\left(M/\pi_n \to \beta(M)\right).$$

2 Les noyaux sauvages étales

2.1 Noyaux de localisation

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, P. Schneider a introduit (cf. [S]) les noyaux de localisation

$$Ш^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i+1)) := \ker(H^2(G^S_F, \mathbb{Z}_p(i+1)) \to \oplus_{v \in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1))).$$

Le groupe $Ш^2_{S_p}(F, \mathbb{Z}_p(1))$ s'identifie canoniquement au groupe A'_F. Pour tout $i \geq 1$, le groupe $Ш^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i+1))$ s'identifie canoniquement à un sous-groupe de $K^{ét}_{2i}(\mathcal{O}^S_F)$. Ainsi $Ш^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i+1))$ est un p-groupe abélien fini. Il ne dépend pas de l'ensemble S (contenant $S_p \cup S_\infty$). On adopte alors la notation suivante :

$$WK^{ét}_{2i}(F) := Ш^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i+1)).$$

Le groupe $WK^{ét}_{2i}(F)$ est appelé $2i$*-ième noyau sauvage étale*. Cette appellation est due à T. Nguyen Quang Do (cf. [N1]) ; elle est justifiée par le fait que pour $i = 1$, le groupe $Ш^2_S(F, \mathbb{Z}_p(2))$ s'identifie, d'après les résultats de Tate, à la p-partie du noyau sauvage usuel $WK_2(F)$. Noyaux sauvages et K-groupes pairs sont reliés par les suites exactes :

$$0 \to WK^{ét}_{2i}(F) \to K^{ét}_{2i}(\mathcal{O}^S_F) \to \oplus_{v \in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1)) \to H^0(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i))^* \to 0.$$

Noyaux sauvages et p-groupes de classes sont reliés par la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Fixons un entier $i \geq 1$. On suppose que F contient μ_{2p} et qu'au moins un premier p-adique de F est totalement ramifiée dans F_∞/F. Alors il existe une application surjective :*

$$WK^{ét}_{2i}(F)/p \to A'_F/p(i).$$

2.2 Théorie d'Iwasawa des noyaux sauvages

On fait maintenant le lien entre les noyaux sauvages définis précédemment et la théorie d'Iwasawa.

Rappelons que $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ où F_∞/F est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique et que pour tout $n \geq 0$, on note $\Gamma_n := \mathrm{Gal}(F_\infty/F_n) = \Gamma^{p^n}$. On pose $E = F(\mu_p)$ et $\Delta = \mathrm{Gal}(E/F)$. Enfin on note d l'ordre de Δ. Pour simplifier, on pose $X'_\infty := X'_{F_\infty}$.

Par dualité de Poitou-Tate et montée dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique P. Schneider donne une description du $2i$-ième noyau sauvage de E comme co-descendu d'un Λ-module (cf [S], §6 lemma 1). En considérant les co-invariants sous l'action de Δ on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Pour tout entier positif i non nul tel que $i \equiv 0 \bmod d$, il existe un isomorphisme canonique :*

$$WK_{2i}^{ét}(F) \simeq \left(X'_\infty(i)\right)_\Gamma$$

Posons $WK_{2i}^{ét}(F_\infty) := \varinjlim WK_{2i}^{ét}(F_n)$, où la limite est prise sur les morphismes d'extensions.

On tire du théorème 2.2 la description à l'infini suivante :

Proposition 2.3. *Si $\mu_{X'_\infty} = 0$ alors pour tout entier positif i non nul tel que $i \equiv 0 \bmod d$, on a un isomorphisme canonique :*

$$WK_{2i}^{ét}(F_\infty) \simeq X'_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i).$$

Démonstration. L'hypothèse $\mu_{X'_\infty} = 0$ implique que la suite $\{p^n\}$ est $X'_\infty(i)$-admissible. Donc d'après le théorème 1.10, on a l'isomorhisme :

$$\begin{array}{rcl} \beta(X'_\infty(i)) & \simeq & \varinjlim (X'_\infty(i))/p^n \\ & = & X'_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i). \end{array}$$

D'autre part, la finitude de $WK_{2i}^{ét}(F_n) \simeq (X'_\infty(i))_{\Gamma_n}$, montre que $\{(1+T)^{p^n} - 1\}$ est une suite $X'_\infty(i)$-admissible. Donc

$$\begin{array}{rcl} \beta(X'_\infty(i)) & \simeq & \varinjlim (X'_\infty(i))_{\Gamma_n} \\ & := & WK_{2i}^{ét}(F_\infty). \end{array}$$

□

Rappelons enfin la description classique des noyaux de capitulation dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique. Pour tout $n \geq 0$, et tout entier positif non nul

$i \equiv 0 \bmod d$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Cap}_i(F_n/F) &= \ker(WK_{2i}^{\acute{e}t}(F) \to WK_{2i}^{\acute{e}t}(F_n)) \\ &\simeq \ker((X'_\infty(i))_\Gamma \to (X'_\infty(i))_{\Gamma_n}) \\ &\subseteq \big((X'_\infty)^0(i)\big)_\Gamma \end{aligned}$$

On pose $\mathrm{Cap}_i(F_n) = \ker(WK_{2i}^{\acute{e}t}(F_n) \to WK_{2i}^{\acute{e}t}(F_\infty))$. Alors pour tout n suffisamment grand, le corollaire 1.12 nous donne :

$$\mathrm{Cap}_i(F_n) \simeq (X'_\infty)^0(i)$$

Proposition 2.4. *Les propositions suivantes sont equivalentes :*

(i) Le $\mathbb{Z}_p$-module $X'_\infty = (\mathcal{G}'_\infty)^{ab}$ est abélien libre.

(ii) L'invariant $\mu_{X'_\infty}$ est nul et pour tout entier positif non nul i tel que $i \equiv 0 \bmod d$, on a la descente galoisienne

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(F) \simeq WK_{2i}^{\acute{e}t}(F_\infty)^\Gamma.$$

Démonstration. La flèche $WK_{2i}^{\acute{e}t}(F) \to WK_{2i}^{\acute{e}t}(F_\infty)^\Gamma$ est toujours surjective (cf. [LMN, Lemma 1.1]).
Regardons l'injectivité. D'après la proposition 1.7, le noyau $\mathrm{Cap}_i(F)$ est nul si et seulement si $\mathrm{Cap}_i(F_n)$ est nul pour tout n ; c'est donc équivalent à la trivialité de $(X'_\infty)^0$. Enfin, X'_∞ est $\mathbb{Z}_p$-libre si et seulement s'il n'a pas de $\mathbb{Z}_p$-torsion. Ceci est équivalent à la trivialité de $(X'_\infty)^0$ et de $\mu_{X'_\infty}$. □

Remarques.
- La proposition 2.4 établit un lien entre la structure de $\mathcal{G}'_\infty$ et la descente galoisienne dans la classe des extensions cyclotomiques. Dans la suite, le théorème 3.4 examinera le cas où la descente est étendue à la classe des extensions *localement* cyclotomiques
- Dans l'assertion (ii) de la proposition précédente, on peut remplacer le quantificateur *pour tout entier* par *il existe un entier.*

3 Sur la pro-p-liberté de $\mathcal{G}'_{F_\infty}$

3.1 Extensions localement cyclotomiques

Notre but dans cette partie est d'étudier le comportement galoisien des noyaux sauvages étales et de mettre en évidence le rôle particulier joué par les extensions *localement cyclotomiques*. Pour cela, rappelons quelques définitions et notations.
Pour tous les corps N considérés, on note N_∞ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de N.

Définition 3.1. *Une (pro-)p-extension L/F de corps de nombres est localement cyclotomique si pour toute place finie v de F et toute place $w|v$ de L on a l'inclusion :*

$$L_w \subseteq (F_v)_\infty.$$

Remarques.

1. Dans la terminologie introduite par J.-F. Jaulent (cf. [J2]), les extensions localement cyclotomiques sont exactement les extensions non *logarithmiquement* ramifiées.
2. Une extension localement cyclotomique est p-ramifiée.

Considérons $\mathcal{L}'_{F_\infty} = \bigcup_{F\subset L} L$, où L parcourt la classe des p-extensions localement cyclotomiques de F.

L'extension $\mathcal{L}'_{F_\infty}/F$ est une pro-p-extension qui contient F_∞/F. Dans [JS] les auteurs proposent une construction "explicite" de $\mathcal{L}'_{F_\infty}/F$ au moyen de la tour localement cyclotomique de F.

Notons que $\mathcal{G}'_{F_\infty} = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}'_{F_\infty}/F_\infty)$.

On pose $\Delta := \mathrm{Gal}(F(\mu_p)/F)$ (resp. $\Delta_v := \mathrm{Gal}(F_v(\mu_p)/F_v)$) et d (resp. d_v) son ordre.

Comme cela est montré dans [KM, Proposition 2.3] ou dans [JMi, Proposition 10], et contrairement aux K-groupes pairs, le morphisme de norme

$$N_{L/F,i} : WK_{2i}^{ét}(L) \to WK_{2i}^{ét}(F)$$

n'est pas tout le temps surjectif. C'est exactement dans le cas des extensions localement cyclotomiques (mais non cyclotomiques) que la surjectivité est mise en défaut.

Intéressons-nous au morphisme d'extension

$$WK_{2i}^{ét}(F) \to WK_{2i}^{ét}(L)^G$$

dans le cas des p-extensions localement cyclotomiques.

La suite exacte 2.1 permet de comparer les noyaux de capitulation des noyaux sauvages étales et des K-groupes pairs dans les extensions localement cyclotomique :

Proposition 3.2. *Soit L/F une p-extension localement cyclotomique de groupe de Galois G. On a l'égalité :*

$$\mathrm{Cap}_i(L/F) = \ker(WK_{2i}^{ét}(F) \to WK_{2i}^{ét}(L)).$$

De plus, on a l'inégalité entre les ordres

$$|WK_{2i}^{ét}(F)| \geq |WK_{2i}^{ét}(L)^G|.$$

En particulier, l'extension $WK_{2i}^{ét}(F) \to WK_{2i}^{ét}(L)^G$ *est injective si et seulement si elle est bijective.*

Soit L/F une extension localement cyclotomique, disjointe de F_∞/F cyclique de degré p. D'après [KM, Proposition 2.3], on sait que $|\operatorname{coker}(N_{L/F,i})| = p$. On a donc la minoration suivante pour les noyaux de capitulation lorsque $i \equiv 0 \bmod d$:

$$|\operatorname{Cap}_i(L/F)| \geq \frac{p}{|\ker(N_{L/F,i})|}.$$

On vérifie facilement que $|\ker(N_{L/F,i})| = 1$ où p. Cependant, on ne dispose pas de formules de genres analogues à celles données dans [KM], qui nous permettraient de déterminer l'ordre du noyau précédent dans le cas localement cyclotomique. Comme nous allons le voir dans ce qui suit, le comportement galoisien des noyaux sauvages dans de telles extensions est lié à la structure du pro-p-groupe $\mathcal{G}'_{F_\infty}$.

3.2 Caractérisation de la pro-p-liberté

On intéresse dans cette section au caractère pro-p-libre du groupe $\mathcal{G}'_\infty := \mathcal{G}'_{F_\infty}$. Ce problème a déjà été abordé par différents auteurs (cf. [N2], [O], [Sha] [Wi]...).

Exemples.

- Si F contient μ_p et est un corps p-rationnel (ou p-régulier, cf. [GrJ], [Mo] et [MN]) alors $\mathcal{G}'_\infty$ est trivial (donc pro-p-libre de rang 0). Plus généralement $\mathcal{G}'_\infty = 0$ si et seulement si $WK_{2i}^{ét}(F) = 0$ pour un entier positif i tel que $i \equiv 0 \bmod d$.
- Si $(X'_\infty)^0 = 0$, $\mu(X'_\infty) = 0$ et $\lambda(X'_\infty) = 1$ alors $X'_\infty \simeq \mathbb{Z}_p$. Ainsi $\mathcal{G}'_\infty \simeq \mathbb{Z}_p$ (donc pro-p-libre de rang 1). Ces conditions sont satisfaites pour les corps suivants (cf. [W]) :

$$F = \mathbb{Q}(\mu_p), \text{ avec } p = 37, 59, 67, 101, 103, 131, 149, 233, 257, 263.$$

On ne connait pas d'exemple de corps de nombres tel que $\mathcal{G}'_\infty$ est pro-p-libre de rang $d(\mathcal{G}'_\infty)$ supérieur à 1. Par contre, nous construirons dans la suite des couples (F, p) avec $\mathcal{G}'_\infty$ non pro-p-libre.

Le théorème suivant caractérise la pro-p-liberté de $\mathcal{G}'_\infty$. On peut trouver une preuve de $(i) \Rightarrow (ii)$ dans [V, Proposition 4.5], et une preuve de la réciproque (lorsque F contient μ_{2p}) dans [N3, théorème 3.1]. Nous proposons ici une démonstration de l'équivalence, différente des deux précédentes et qui se base essentiellement sur l'équivalence montrée dans la proposition 1.4.

Nous supposerons que l'invariant "mu" associé à F_∞/F est trivial, de sorte que, pour toute p-extension L/F localement cyclotomique, l'invariant "mu" associé à L_∞/L est aussi trivial (cf. par exemple [NSW, Theorem 11.3.8]). C'est une conséquence de la forme faible de la conjecture de Leopoldt, qui est vraie pour la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique.

Fixons un entier positif i tel que $i \equiv 0 \bmod d$ (on rappelle que F contient μ_4 lorsque $p=2$). Étant donnée une p-extension M/L localement cyclotomique contenant F, on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd} WK_{2i}^{\acute{e}t}(L_\infty) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & WK_{2i}^{\acute{e}t}(M_\infty) \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)\otimes X'_{L_\infty} \arrow[r, "\mathcal{V}"] & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)\otimes X'_{M_\infty} \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

où

– le morphisme $\mathcal{V}$ provient du transfert (il est défini dans la proposition 1.4),
– les flèches verticales sont les isomorphismes montrés dans la proposition 2.3,
– la flèche horizontale supérieure provient par limite inductive des morphismes d'extension

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(L_n) \to WK_{2i}^{\acute{e}t}(M_n).$$

Lemme 3.3. *Le diagramme 3.1 est commutatif.*

Démonstration. Les flèches horizontales dans le diagramme 3.1 proviennent par dualité de la co-restriction :

$$H^1(\mathcal{G}'_{M_\infty},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \to H^1(\mathcal{G}'_{L_\infty},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

□

Théorème 3.4. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le groupe $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ est pro-p-libre.

(ii) L'invariant $\mu_{X'_{F_\infty}}$ est nul et pour toute p-extension L/F localement cyclotomique et tout entier $i \equiv 0 \bmod d$, on a l'isomorphisme canonique :

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(F) \xrightarrow{\simeq} WK_{2i}^{\acute{e}t}(L)^G,$$

où $G = \mathrm{Gal}(L/F)$.

Démonstration. D'après la proposition 1.4, le groupe $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ est pro-p-libre si et seulement si pour tout sous groupe ouvert $U \lhd \mathcal{G}'_{E_\infty}$

(a) U^{ab} est $\mathbb{Z}_p$-libre.

(b) Pour tout sous groupe ouvert $V \lhd U$,

$$\mathcal{V} : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes U^{ab} \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes V^{ab},$$

est injectif.

Supposons que (a) et (b) sont satisfaites. Soit L une p-extension localement cyclotomique de F. Le groupe $\mathcal{G}'_{L_\infty}$ est un sous-groupe ouvert distingué de $\mathcal{G}'_{F_\infty}$. L'hypothèse (b) et la commutativité de (3.1) nous donnent

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(F_\infty) \hookrightarrow WK_{2i}^{\acute{e}t}(L_\infty).$$

Soit l'entier $n_0 \geq 0$ tel que $F_{n_0} = F_\infty \cap L$. Les groupes de Galois $\Gamma_{F_{n_0}} := \mathrm{Gal}(F_\infty/F_{n_0})$ et $\Gamma_L := \mathrm{Gal}(L_\infty/L)$ sont *canoniquement* isomorphes. Posons $\Gamma := \Gamma_{F_{n_0}} \simeq \Gamma_L$. On peut alors passer aux invariants sous Γ dans l'inclusion précédente. L'hypothèse (a) et la proposition 2.4 nous donnent ainsi l'inclusion :

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(F_{n_0}) \hookrightarrow WK_{2i}^{\acute{e}t}(L).$$

La descente galoisienne des noyaux sauvages est satisfaite dans F_∞/F. Ainsi $\mathrm{Cap}_i(L/F) = 0$. La surjectivité résulte de la proposition 3.2.

Montrons que l'assertion (ii) entraîne (a) et (b).

Soit $U \lhd \mathcal{G}_{F_\infty}$ un sous-groupe ouvert. Il existe un entier n_0 et une p-extension L/F_{n_0} localement cyclotomique telle que $U^{ab} = X'_{L_\infty}$. Par hypothèse, pour tout entier $m \geq 0$ on a $\mathrm{Cap}_i(L_m/F) = 0$. Donc d'après la proposition 1.7, on a aussi $\mathrm{Cap}_i(L_m/L) = 0$. Enfin la proposition 2.4 nous donne la $\mathbb{Z}_p$-liberté de U^{ab} et démontre (a).

Soit un couple de sous-groupes ouverts $V \lhd U$. Il existe un couple d'extensions de F, localement cyclotomiques, $L \subseteq M$ telles que

$$U^{ab} = X'_{L_\infty} \text{ et } V^{ab} = X'_{M_\infty}.$$

Toujours d'après l'hypothèse (ii) et la proposition 1.7, on a pour tout $n \gg 0$, l'injection

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(L_n) \hookrightarrow WK_{2i}^{\acute{e}t}(M_n).$$

Enfin on a bien $WK_{2i}^{\acute{e}t}(L_\infty) \hookrightarrow WK_{2i}^{\acute{e}t}(M_\infty)$ et la commutativité de (3.1) permet de conclure à l'injectivité de $\mathcal{V}$. $\square$

Remarques.

- Encore une fois, dans l'assertion (ii), on peut remplacer le quantificateur *pour tout entier* par le quantificateur *il existe un entier*.
- La pro-p-liberté de $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ est donc équivalente à la trivialité des deux invariants attachés au coupe (F, p) suivants :

$$\mu_{X'_{F_\infty}} \text{ et } \mathrm{Cap}_i(\mathcal{L}_{F'_\infty}/F).$$

4 Applications

4.1 Le cas pro-p-cyclique

Un groupe non trivial $\mathcal{G}$ est dit *pro-p-cyclique* lorsque $d(\mathcal{G}) = 1$. Autrement dit,

$$\mathcal{G} \simeq \mathbb{Z}/p^N \text{ ou } \mathcal{G} \simeq \mathbb{Z}_p,$$

Comme corollaire à la démonstration du théorème 3.4, nous obtenons un critère pour la pro-p-cyclicité de $\mathcal{G}'_{F_\infty}$.
On fixe un entier positif i tel que $i \equiv 0 \bmod d$.

Proposition 4.1. *Soit F un corps de nombres. S'il existe une extension L/F cyclique de degré p, localement cyclotomique et disjointe de F_∞ telle que le morphisme*

$$WK_{2i}^{ét}(F) \to WK_{2i}^{ét}(L)$$

est surjectif, alors le groupe $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ est pro-p-cyclique.

Démonstration. Posons $M := \mathrm{coker}\big(\big(X'_{F_\infty}/Ver(X'_{L_\infty})\big)\big)$.
On a la suite exacte :

$$X'_{F_\infty}(i) \overset{Ver}{\to} X'_{L_\infty}(i) \to M(i) \to 0.$$

On pose $\Gamma := \mathrm{Gal}(F_\infty/F) \simeq \mathrm{Gal}(L_\infty/L)$. En passant aux co-invariants sous l'action de Γ, on obtient la suite exacte :

$$WK_{2i}^{ét}(F) \to WK_{2i}^{ét}(L) \to M(i)_\Gamma \to 0.$$

D'après l'hypothèse, le groupe $M(i)_\Gamma$ est nul et le lemme de Nakayama nous donne la trivialifté de M. Le transfert est ainsi surjectif et de manière duale, on a l'injection :

$$H^1(\mathcal{G}'_{F_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \overset{cor}{\hookrightarrow} H^1(\mathcal{G}'_{L_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

L'égalité $cor \circ res = p$ et l'injectivité de la co-restriction nous donnent donc :

$$\ker(res) = {}_pH^1(\mathcal{G}'_{F_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq H^1(\mathcal{G}'_{F_\infty}, \mathbb{Z}/p).$$

Par ailleurs, la suite exacte d'inflation-restriction nous donne aussi :

$$\ker(res) = H^1(\mathrm{Gal}(L/F), \mathbb{Z}/p).$$

Or $\mathrm{Gal}(L/F) \simeq \mathbb{Z}/p$, donc $H^1(\mathcal{G}'_{F_\infty}, \mathbb{Z}/p) \simeq \mathbb{Z}/p$. $\square$

Remarque. Réciproquement, on vérifie facilement que si $\mathcal{G}'_{F_\infty} \simeq \mathbb{Z}_p$, alors pour tout $n \geq 0$, l'extension induit un isomorphisme

$$WK_{2i}^{ét}(F_n) \simeq WK_{2i}^{ét}(L_n).$$

4.2 Critères de non pro-p-liberté

Dans cette partie F désigne un corps de nombres contenant μ_{2p}. On pose $\mathcal{G}'_\infty := \mathcal{G}_{F'_\infty}$ et pour tout $\mathbb{Z}_p$-module de type fini A, on note $\mathrm{rg}_p(A) := \dim_{\mathbb{F}_p}(A/p)$ le p-rang de A.
Dans [JS, Théorème 12], (cf aussi [As, Théorème 3]) les auteurs donnent un critère de non-finitude pour $\mathcal{G}_\infty$. Il s'énonce comme suit : si on a l'inégalité

$$\mathrm{rg}_p(WK_{2i}^{\acute{e}t}(F)) \geq 1 + 2\sqrt{r_2(F)+2}, \tag{4.1}$$

alors $\mathcal{G}'_\infty$ est infini.
L'objet de cette partie est d'utiliser le théorème 3.4 pour donner un critère de non pro-p-liberté pour $\mathcal{G}'_\infty$. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Proposition 4.2. *Soit L une p-extension S-ramifiée de F et F contient μ_{2p}. Posons $G = \mathrm{Gal}(L/F)$ et le p-rang de G.*
Si $d(G) > 1 + r_2(F)$ alors $\mathrm{Cap}_i(L/F)$ n'est pas trivial.

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_{2i+1}^{\acute{e}t}(L)/p \arrow[r] & H^1(G_L^S, \mathbb{Z}/p^n(i+1)) \arrow[r] & K_{2i}^{\acute{e}t}(\mathcal{O}_L^S) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_{2i+1}^{\acute{e}t}(F)/p \arrow[r] \arrow[u] & H^1(G_F^S, \mathbb{Z}/p^n(i+1)) \arrow[r] \arrow[u, "res"] & K_{2i}^{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Comme $\mu_{2p} \subset F$ le groupe G_F^S opère trivialement sur $\mathbb{Z}/p(i+1)$ et le noyau de la restriction est :

$$\ker\left(H^1(G_F^S, \mathbb{Z}/p(i+1)) \stackrel{res}{\to} H^1(G_L^S, \mathbb{Z}/p(i+1))\right) = H^1(G, \mathbb{Z}/p)(i+1).$$

Par hypothèse

$$d(G) = \dim_{\mathbb{F}_p}(H^1(G, \mathbb{Z}/p)(i+1)) > \mathrm{rg}_p(K_{2i+1}^{\acute{e}t}(F)) = 1 + r_2(F).$$

Ainsi, il existe un élément non nul, $x \in H^1(G, \mathbb{Z}/p)(i+1)$ tel que $\delta(x) \in {}_pK_{2i}^{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S)$ est également non nul et qui capitule dans $K_{2i}^{\acute{e}t}(\mathcal{O}_L^S)$. □

Théorème 4.3. *Soit F un corps de nombres contenant μ_{2p}, tel que*

$$\mathrm{rg}_p(WK_{2i}^{\acute{e}t}(F)) \geq 1 + r_2(F). \tag{4.2}$$

Alors $\mathcal{G}'_\infty$ n'est pas un pro-p-groupe libre.

Démonstration. Posons $\mathcal{G}' = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}'_\infty/F)$. Soit L_0/F la sous-extension de $\mathcal{L}'_\infty/F$, abélienne d'exposant p maximale. Comme $\mu_{2p} \subset F$, on a les égalités entre p-rangs (cf. [J1]) :

$$d(\mathrm{Gal}(L_0/F)) = 1 + \mathrm{rg}_p(WK_{2i}^{\acute{e}t}(F)).$$

Donc par hypoth'ese $d(\mathrm{Gal}(L_0/F)) > 1+r_2(F)$. Ainsi, d'après la proposition 4.2, le noyau $\mathrm{Cap}_i(L_0/F)$ est non nul. Comme L_0/F est une p-extension localement cyclotomique, la capitulation porte sur le noyau $WK_{2i}^{ét}(F)$ et le théorème 3.4 permet de conclure. □

Remarques.

- L'inégalité (4.1) entraîne l'inégalité (4.2) dès que $r_2(E) \geq 5$. Ainsi, un corps satisfaisant aux conditions du théorème 4.3 et de degré au moins 10 sur $\mathbb{Q}$ admet un groupe $\mathcal{G}'_\infty$ infini *et* non pro-p-libre.
- Le p-rang du noyau sauvage est accessible par des méthodes numériques puisqu'il coïncide avec le p-rang du groupe des classes logarithmiques (cf. [J1]).

Corollaire 4.4. *Si au moins une place p-adique se ramifie totalement dans F_∞/F, alors l'inégalité*

$$\mathrm{rg}_p(A'_F) \geq 1 + r_2(F)$$

implique que $\mathcal{G}'_\infty$ n'est pas pro-p-libre.

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 2.1 et du théorème 4.3. □

Pour vérifier que le critère du théorème 4.3 est intéressant il faut exhiber des corps de nombres F qui satisfont l'inégalité (4.2). Le principe est le suivant : dans une p-extension F/k, le p-rang des noyaux sauvages étales de F est suffisamment grand dès que l'extension F/k est suffisamment ramifiée.

Proposition 4.5. *Soit F/k une extension cyclique de degré p. Supposons que*

- *F contient μ_{2p}*
- *au moins une place p-adique se ramifie totalement dans F_∞/F*
- *F/k est une extension cyclique de degré p dans laquelle toute les places p-adiques se ramifient.*
- *$|Ram(F/k) - S_p(k)| \geq 2 + (p+1)r_2(k)$, où $Ram(F/k)$ est l'ensemble des places de k qui se ramifient dans F/k.*

Alors le groupe $\mathcal{G}'_\infty$ n'est pas pro-p-libre.

Démonstration. On a l'inégalité (cf. [NSW, Proposition 10.8.3]) :

$$\mathrm{rg}_p\, A'_F \geq |Ram(F/k) - S_p(k)| - r_1(k) - r_2(k) - \delta + r'_1(k),$$

où $r'_1(k)$ est le nombre de places rélles de k qui se complexifient dans F et δ vaut 0 ou 1 selon que $\mu_p \not\subset k$ ou $\mu_p \subset k$.
La proposition 2.1 et le théorème 4.3 permettent de conclure. □

Remarque. La proposition précédente permet de construire une infinité de couples (F,p) tels que $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ n'est pas pro-p-libre.

Exemple. Supposons que $F/\mathbb{Q}(\mu_p)$ est une extension cyclique de degré p, ramifiée au dessus de p et dans laquelle au moins $\frac{p^2+3}{2}$ places non p-adiques se ramifient. Alors le groupe $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ n'est pas pro-p-libre.

Pour finir, on se place dans le cadre suivant. Le premier p est supposé impair. Le corps E contient μ_p et est à conjugaison complexe. On note F le sous corps totalement réel de E. Posons $\Delta := \mathrm{Gal}(E/F)$. Pour tout $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module A, on note A^+ (resp. A^-) la composante réelle (resp. imaginaire) de A.
Pour simplifier, on pose $i=1$ et $\mathcal{G}'_\infty = \mathcal{G}'_{E_\infty}$.

Pour les corps à multiplication complexe, on dispose du principe général du *Spiegelungsatz* de Leopoldt qui compare les parties "plus" et "moins" (cf. par exemple [Ko, Theorem 3.5] ou [JMi, Proposition 6]). Dans le cadre des noyaux sauvages, cela donne l'inégalité suivante :

$$0 \leq \dim_{\mathbb{F}_p}(WK_2^{\acute{e}t}(E)/p)^+ - \dim_{\mathbb{F}_p}(WK_2^{\acute{e}t}(E)/p)^- \leq [F:\mathbb{Q}] = r_2(E).$$

On remarque que si le noyau sauvage satisfait l'inégalité 4.2 alors nécessairement la partie imaginaire $WK_2^{\acute{e}t}(E)^-$ n'est pas triviale.
En fait, comme le montre la proposition suivante, cette condition est suffisante pour montrer que $\mathcal{G}'_\infty$ n'est pas pro-p-libre.

Proposition 4.6. *Si $WK_2^{\acute{e}t}(E)^- \neq 0$ alors le groupe $\mathcal{G}'_\infty$ n'est pas pro-p-libre.*

Démonstration. L'hypothèse $WK_2^{\acute{e}t}(E)^-$ non trivial montre que F admet une extension localement cyclotomique, disjointe de F_∞. On a donc

$$\dim_{\mathbb{F}_p}(\mathrm{Gal}(L_0/E)^+) \geq 2.$$

Il suffit ensuite de prendre la partie + de la suite exacte :

$$0 \to K_3^{\acute{e}t}(E)/p \to H^1(G_E^S, \mu_p) \otimes \mu_p \xrightarrow{\delta} {}_pK_2^{\acute{e}t}(\mathcal{O}_E^S) \to 0,$$

en considérant le fait que $(K_3^{\acute{e}t}(E)/p)^+$ est cyclique.
Le raisonnement est alors le même que dans la proposition 4.2 : il existe un élément de $H^1(G_E^S, \mu_p) \otimes \mu_p$ qui n'est pas dans $K_3^{\acute{e}t}(E)/p$ et qui se trivialise par restriction dans $H^1(G_{L_0}^S, \mu_p) \otimes \mu_p$. Cet élément s'envoie donc sur un élément non nul de $\mathrm{Cap}_i(L_0/F)$. Enfin le théorème 3.4 permet de conclure. □

Nous retrouvons enfin la proposition 3.3 de [Wi] :

Corollaire 4.7. *Supposons qu'au moins une place p-adique se ramifie totalement dans E_∞/E, et que F admet une extension non-ramifiée et p-décomposée (i.e. $A'_F \neq 0$). Alors le groupe $\mathcal{G}'_{E_\infty}$ n'est pas pro-p-libre.*

La proposition précédente est immédiate si l'on suppose que F satifait la conjecture de Greenberg en p. Cette conjecture postule en effet la trivialité de l'invariant $\lambda^+_{X'_\infty}$ (i.e. $(X'_\infty)^+$ est un $\mathbb{Z}_p$-module *fini*).
En passant à la partie "moins" dans l'isomorphisme

$$WK_2^{ét}(E)/p \simeq (X'_\infty \otimes \mu_p)_\Gamma,$$

on remarque que $WK_2^{ét}(E)^- \neq 0$ entraîne la non nullité $(X'_\infty)^+$. La conjecture de Greenberg entraine que $(\mathcal{G}'_{E_\infty})^{ab}$ contient un sous-groupe fini *non nul*. Ainsi $\mathcal{G}'_{E_\infty}$ n'est pas pro-p-libre.

Références

[As] J. Assim, *Analogues étales de la p-tour des corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), no. 3, 651-663.

[AM] J. Assim, A. Movahhedi, *Bounds for étale Capitulation Kernels*, K-theory, **33** (2004), 199-213.

[FW] B. Ferrero & L. Washington, *The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields*, Ann. Math. **109** (1979), 377-395.

[GrJ] G. Gras & J.-F. Jaulent , *Sur les corps de nombres réguliers*, Math. Z. **202** (1989), no. 3, 343-365.

[J1] J.-F. Jaulent, *Sur le noyau sauvage des corps de nombres*, Acta Arith. **67** (1994), no.4, 335-348.

[J2] J.-F. Jaulent, *Théorie l -adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355-397.

[JM1] J.-F. Jaulent & C. Maire, *A propos de la tour localement cyclotomique d'un corps de nombres*, Abh. Math. Sem Hamburg 4 **70** (2000), 239-250.

[JM2] J.-F. Jaulent & C. Maire, *Radical hilbertien et tour localement cyclotomique*, Japan. J. Math. **28** (2002), no. 2, 203-213.

[JMi] J.-F. Jaulent & A. Michel, *Approche logarithmique des noyaux étales sauvages des corps de nombres*, J. Number Th. **120** (2006), 72-91.

[JS] J.-F. Jaulent & F. Soriano, *Sur les tours localement cyclotomiques de corps de nombres.*, Archiv der Math. **73** (1999), 132-140.

[Ka] B. Kahn, *Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres*, K-theory **7** (1993), 55-100.

[Ko] M. Kolster, *Remarks on étale K-theory and Leopoldt's Conjecture*, Séminaire de Théorie des Nombres de Paris (91-92), Progress in Mathematics **116**, Birkhäuser 1993, 37-62

[KM] M. Kolster & A. Movahhedi, *Galois co-descent for étale wild kernels and capitulation*, Ann. Inst. Fourier, **50** (2000), 35-65.

[LMN] M. Le Floch, A. Movahhedi & T. Nguyen Quang Do, *On capitulation cokernels in Iwasawa theory*, Amer. Journal of Mathematics, **127** (2005), 851-877.

[Mo] A. Movahhedi, *Sur les p-extensions des corps p-rationnels*, Math. N. **149** (1990), 163-176.

[MN] A. Movahhedi & T. Nguyen Quang Do, *Sur l'arithmétique des corps de nombres p-rationnels*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987-88, 155-200, Progr. Math. **81**, Birkhäuser Boston, 1990.

[MS] W. McCallum & R. Sharifi, *A cup product in the Galois cohomology of number field*, Duke Math. J. **120** (2003), 269-310.

[N1] T. Nguyen Quang Do, *Analogues supérieur du noyau sauvage*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **4** (1992), 263-271.

[N2] T. Nguyen Quang Do, *K_3 et formules de Riemann-Hurwitz p-adiques*, K-Theory **7** (1993), no. 5, 429-441.

[N3] T. Nguyen Quang Do, *Théorie d'Iwasawa des noyaux sauvages étales d'un corps de nombres*, Publications Math. de la Faculté des Sciences de Besançon (2002).

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt & K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Springer Verlag, Berlin (2000).

[O] M. Ozaki *Non-abelian Iwasawa theory of $\mathbb{Z}_p$-extensions*, J. Reine Angew. Math. **602** (2007), 59-94.

[S] P. Schneider, *Uber gewisse Galoiscohomologiegruppen*, Math.Z. **168**, 181-205 (1979).

[Se1] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris (1962).

[Se2] J.-P. Serre, *Galois Cohomology*, Lectures Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin (1994).

[Sha] R. Sharifi, *On Galois groups of unramified pro-p extensions*, disponible sur arxiv.org, arXiv :0801.1360v2

[Sou] C. Soulé, *K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale*, Invent. Math. **55** (1979), 251-295.

[Ta] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257-274.

[V] D. Vauclair, *Cup produit, noyaux de capitulation étales et conjecture de Greenberg généralisée*, K-theory **36** (2005), 223-244

[W] L.C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, 2ème édition, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Wi] K. Wingberg, *On the maximal unramified p-extension of an algebraic number field* , J. Reine Angew. Math. **440** (1993), 129-156.